MÉMOIRE

SUR

LA QUESTION :

Lorsque quelques-unes des racines de l'équation finale sont incommensurables, comme alors on ne peut en obtenir que des valeurs rapprochées, la substitution de chacune d'elles dans les deux proposées, ordonnées suivant l'autre inconnue, en altère les coefficiens d'une manière qu'on ne peut apprécier, en sorte que chaque substitution dénature ou peut dénaturer les valeurs de la seconde inconnue, c'est-à-dire, lui en faire acquérir qui soient très-éloignées des véritables.

On propose donc de déterminer, sans résoudre effectivement les équations, 1° les limites extrêmes des valeurs de chacune des inconnues; 2° une limite au-dessous de laquelle ne puisse tomber la différence entre deux valeurs de chacune de ces mêmes inconnues (ce qui rentre dans la méthode de la Grange, pour la recherche des racines incommensurables des équations à une inconnue); 3° on demande des applications numériques aux solutions réelles seulement, inégales, égales et incommensurables.

PAR M. VÈNE, OFFICIER DU GÉNIE.

Les plus belles théories demeurent stériles, si l'application et l'exécution ne leur donnent un caractère de fécondité. (JULLIEN, *Esquisse d'un essai sur la philosophie des scienees.*)

BRUXELLES,

P. J. DE MAT, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BRUXELLES ET DE L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN.

1824.

QA
155
.V4A
1824

MÉMOIRE

SUR

LA QUESTION D'ANALYSE

CONCERNANT L'ÉLIMINATION ENTRE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES.

1. Toute expression de la forme $Ax + Bx^2 + Cx^3 \ldots\ldots Lx^m$, peut devenir plus petite que toute quantité donnée K, en donnant à x des valeurs convenables.

En effet, désignons par p le plus grand coefficient des puissances de x, on aura

$$p(x^m + x^{m-1} \ldots\ldots + x) > Ax + Bx^2 + Cx^3 \ldots\ldots + Lx^m$$

et lorsqu'on donne à x une valeur plus petite que 1, on a

$$x^m < x^{m-1} < x^{m-2} \ldots\ldots < x \text{ et } mx > x^m + x^{m-1} \ldots\ldots + x,$$

donc lorsque x est plus petit que 1, on a $pmx > Ax + Bx^2 \ldots Lx^m$ et si l'on fait $pmx = K$ ou $x = \frac{K}{mp}$, l'expression $Ax + Bx^2 \ldots$ $\ldots Lx^m$, devient plus petite que K.

2. Il résulte de là que dans tout polynome, tel que $Ax + Bx^2 \ldots . Lx^m$, ordonné suivant les puissances ascendantes de x, on peut donner à la variable x une valeur assez petite, pour qu'un terme quelconque soit plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent.

En effet, supposons que l'on veuille rendre le terme Cx^n plus grand que tous ceux qui contiennent des puissances plus élevées, on mettra la série sous la forme

$$Ax + Bx^2 \ldots . x^n (C + Dx \ldots \ldots . Lx^{m-n})$$

et au moyen du théorème précédent, on cherchera une valeur x' telle que l'on ait $C > Dx' \ldots . . Lx'^{m-n}$ et cette valeur satisfera à la question; car en multipliant par x'^n les deux membres de cette inégalité, on aura $Cx'^n > Dx'^{n+1} \ldots . Lx'^m$.

3. Si la quantité numérique C est la valeur qu'acquiert le polynome $Ax + Bx^2 +$ etc. lorsqu'on y fait $x = a$, on pourra trouver d'autres valeurs de x qui donneront au polynome des valeurs C′, telles que $C - C'$ soit plus petit que toute quantité donnée K.

En effet, mettons $a + h$ à la place de x dans $Ax + Bx^2 \ldots Lx^m$, on aura

$$A(a+h)+B(a+h)^2.\ldots.L(a+h)^m=C' \text{ ou}$$
$$C'=Aa+Ba^2+\ldots\ldots L a^m+h\alpha+h^2\beta.\ldots\ldots Lh^m$$
$$\text{or, } Aa+Ba^2\ldots La^m=C, \text{ donc}$$
$$C'=C+h\alpha+h^2\beta.\ldots.Lh^m, \text{ ou}$$
$$C'-C=h\alpha+h^2\beta.\ldots.Lh^m,$$

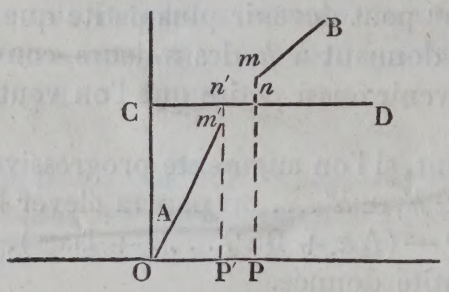
Or, d'après le théorème 1^er^, toute expression de la forme $h\alpha+h^2\beta\ldots Lh^m$ peut devenir plus petite que toute quantité donnée K, en donnant à h des valeurs convenables, donc $C'-C$ peut devenir aussi petite que l'on veut.

Par conséquent, si l'on augmente progressivement la valeur de a de $\pm h$, $\pm h'$, $\pm h''$.... on pourra élever le polynome de manière que $D-(Ax+Bx^2.\ldots.+Lx^m)$, soit plus petit que toute quantité donnée.

4. On a l'habitude de regarder comme un axiome ou de démontrer très-imparfaitement, un théorème qui fait la base de la résolution des équations numériques et qu'on peut énoncer, en disant qu'il existe au moins une racine réelle dans toute équation, qui par deux substitutions différentes produit deux résultats de signe contraire. Il est vrai cependant que cette proposition a été démontrée par la considération des lignes paraboliques; mais cette démonstration ne peut être regardée que comme une induction, tant qu'on n'aura pas fait voir que les courbes paraboliques $y=x^m+px^{m-1}$ etc., sont des courbes continues, et par courbes continues, nous entendons toute courbe qui peut être considérée comme engendrée par le mouvement d'un point matériel qui se meut sans interruption.

Ces courbes jouissent en effet de cette propriété; mais il

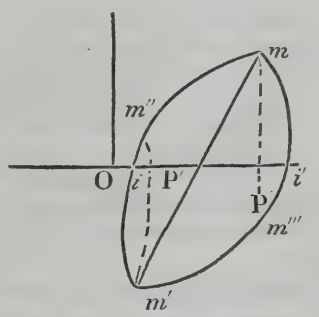
ne suffit pas pour le démontrer, de faire voir qu'à chaque abscisse il correspond une ordonnée réelle, il faut de plus, démontrer que toute quantité prise pour ordonnée, produit une abscisse correspondante, ou en d'autres termes, il faut démontrer que la courbe $y = x^m + Ax^{m-1} \ldots\ldots Tx$, est coupée par toute ligne horizontale qui a pour équation $y = C$



Supposons que la courbe AB soit la courbe qui a pour équation $y = x^m + Ax^{m-1} \ldots\ldots Tx$, menons l'horizontale CD, de manière que $OC = C$, admettons un moment qu'il n'y ait point d'intersection entre la courbe et la droite CD et que m et m' soient les points les plus rapprochés de l'horizontale; faisons $mn = \omega$, $m'n' = \omega'$, il en résultera que $mp - pn$, ou $x^m + Ax^m \ldots + Tx - C$ ne pourra pas être plus petit que ω; or, d'après le théorème précédent, la quantité $x^m + px^{m-1} \ldots + Tx - C$ peut devenir plus petite que toute quantité donnée; donc la droite CD coupe la courbe.

5. La courbe $y = x^m + Ax^m \ldots\ldots Tx + V$ est une courbe semblable à la précédente, elle se forme en augmentant de V chaque ordonnée de la 1re courbe, parconséquent elle est continue, et il est impossible de mener une horizontale entre

deux de ses points, sans que cette horizontale ne coupe la courbe en un point. Par conséquent cette courbe sera coupée par l'axe des x, lorsqu'elle aura un point au-dessus de cet axe, et un autre point au-dessous. C'est-à-dire que toute équation qui donne deux résultats de signe contraire a une racine réelle.



Si la courbe $m\,m'''$ ne coupait pas l'axe dans l'intervalle des deux abscisses OP, OP′ qui donnent des résultats de signe contraire, et si elle le coupait en i, pour la même abscisse OP′, il y aurait deux ordonnées, savoir: p′m' et p′m'', et si la courbe coupait l'axe en i', la même abscisse OP répondrait aux deux ordonnées pm, pm'''.

6. Soit l'équation de degré pair

$$x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \mathrm{T}x + \mathrm{V} = o,$$

faisons $x = \frac{u}{z}$, on aura

$$u^m + pu^{m-1}z + qu^{m-2}z^2 \ldots\ldots \mathrm{T}uz^{m-1} + \mathrm{V}z^m = o \ldots\ldots (1)$$

Si toutes les valeurs de x sont imaginaires, le polynome (1) restera toujours positif pour toutes les valeurs de u et de z;

car s'il changeait de signe l'équation proposée aurait une racine réelle ; et réciproquement si le polynome (1) reste constamment positif ou constamment négatif, l'équation donnée n'aura que des racines imaginaires.

Résolvons l'équation (1) à la manière des équations du second degré, on aura

$$u^2 + pzu = -\left[\frac{\mathrm{V}z^m + \mathrm{T}zu^{m-1} \ldots\ldots qu^{m-2}z^2}{u^{m-2}}\right]$$

$$\text{ou } u = -\frac{pz}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2z^2}{4} - \left[\frac{\mathrm{V}z^m + \mathrm{T}zu^{m-1} \ldots\ldots + qu^{m-2}z^2}{u^{m-2}}\right]}$$

$$\text{ou } u = -\frac{pz}{2} \pm z\sqrt{\frac{(p^2 - 4q)u^{m-2} - 4(\mathrm{V}z^{m-2} \ldots\ldots)}{4u^{m-2}}}$$

u sera imaginaire, lorsque le radical sera négatif, et réciproquement le radical sera négatif, lorsque

$$4(\mathrm{V}z^{m-2} \ldots\ldots) - (p^2 - 4q)u^{m-2} \ldots\ldots (2)$$

sera posititif, et cette quantité ne peut être positive que lorsque $p^2 - 4q < o$.

Remarquons que l'expression (2) est du degré $m-2$, et que pour la rendre positive, il suffira de rendre positive une expression du degré $m-4$, laquelle sera positive en même temps qu'une expression du degré $m-6$; en descendant successivement de deux degrés, on arrivera à une équation du second degré, chaque transformée fournira une condition, et lorsque toutes ces conditions auront lieu, on sera certain que l'équation proposée n'a pas de racines réelles; mais la réciproque n'a pas lieu, c'est-à-dire que l'équation peut avoir toutes ses racines imaginaires sans que les conditions ci-dessus soient remplies.

ÉQUATIONS SIMULTANÉES.

7. Soient les deux équations homogènes

$$A\,x^m + B\,x^{m-1}y. \ldots\ldots \lambda y^m = o. \ldots\ldots (6)$$
$$A'x^m + B'x^{m-1}y. \ldots\ldots \lambda' y^m = o. \ldots\ldots (7)$$

L'équation finale n'aura que des racines imaginaires lorsque l'on ne pourra pas trouver des valeurs de x qui soient telles que parmi les valeurs correspondantes de y prises dans l'équation (6) il y en ait au moins une qui soit égale à une des valeurs de y prises dans l'équation (7).

Supposons que y soient les ordonnées de la courbe représentée par l'équation (6), y' les ordonnées de la courbe (7) et x une abscisse commune aux deux courbes; les valeurs y et y' seront inégales, de sorte que y ne pourra pas satisfaire à l'équation (7).

Donc la somme des polynomes (6) et (7) ne pourra pas être nulle, et réciproquement si cette somme n'est pas nulle, les équations (6) et (7) ne pourront pas avoir de racine commune.

Si l'on traite le polynome

$$(A + A')\,x^m + (B + B')\,x^{m-1}y. \ldots\ldots (\lambda + \lambda')y^m \ldots\ldots (8)$$

comme l'équation (1), on trouvera les conditions qui rendent imaginaires les racines de l'équation finale.

8. Si les équations (6) et (7) n'étaient pas homogènes par rapport aux variables x, y, le polynome (8) ne le serait pas

non plus, et dans ce cas, il faudrait le rendre homogène en faisant $x=\frac{u}{z}, y=\frac{t}{v}$: par exemple, si l'équation (6) est du degré n et l'équation (7) du degré m, le polynome (8) deviendrait homogène et de l'ordre $m+u$ en faisant $x=\frac{u}{z}, y=\frac{t}{v}$, et dans ce cas il ne pourrait conserver le même signe pour toutes les valeurs des variables si $m+n$ n'était pas pair.

En général, si l'on a un nombre m d'équations entre m variables, on peut déterminer avant d'avoir formé l'équation finale un certain nombre de conditions dont l'existence entraîne la non-réalité des racines de l'équation finale.

LIMITES DES RACINES.

9. Si l'on admet que les racines de l'équation

$$x^m + p x^{m-1} + q x^{m-2} \ldots\ldots \mathrm{S}x^2 + \mathrm{T}x + \mathrm{V} = o,$$

soient réelles et représentées par $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$, on aura

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \ldots\ldots = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma \ldots\ldots) = p^2 - 2q;$$

or, quelle que soit la différence numérique qui existe entre ces racines, la plus grande est plus petite que

$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ldots}$ ou que $\sqrt{p^2-2q}$; donc on a $x < \sqrt{p^2-2q}$

si nous appliquons ce raisonnement à l'équation $x^3 + 5x^2 - x - 5 = o$ dont les racines sont $+1, -1, -5$ on trouve

$$x < \sqrt{27} \text{ ou } x < 5,20.$$

Puisque $p^2 - 2q$ est égal à la somme des carrés des racines, il est nécessaire que cette somme soit positive, parconséquent lorsqu'on trouve une équation dans laquelle $p^2 - 2q$ sera négatif, on pourra assurer que cette équation contient des racines imaginaires.

Ainsi donc l'équation $x^3 \pm x^2 + x - V = o$, aura deux racines imaginaires, quelle que soit la valeur de V.

Si l'on fait $x = \frac{1}{z}$ dans l'équation proposée, elle devient

$$z^m + \frac{T}{V} z^{m-1} + \frac{S}{V} z^{m-2} \ldots\ldots + \frac{1}{V} = o,$$

et si toutes les racines sont réelles, on doit avoir

$$z < \sqrt{\frac{T^2}{V^2} - \frac{2S}{V}}, \text{ ou } x > \frac{V}{\sqrt{T^2 - 2SV}}$$

et $T^2 - 2SV$ doit être positif.

Si p est le plus grand coefficient de l'équation donnée,

on a $x^m < P(x^{m-1} + x^{m-2} \ldots\ldots + 1)$, ou $x^m < P\,\frac{x^m - 1}{x - 1}$:

si l'on fait $x - 1 = P$, ou $x = P + 1$,

on a au contraire $x^m > \frac{P(x^m - 1)}{x - 1}$,

par conséquent, les valeurs de x sont toujours plus petites que $p + 1$. Si R est le plus grand coefficient négatif, $R + 1$ est plus grand que la plus grande racine positive, et $\frac{V}{R + V}$ est plus petit que la plus petite racine positive.

Pour avoir la limite des racines négatives, il faut mettre $-x$ à la place de $+x$.

AUTRE PROCÉDÉ

pour avoir les limites des racines.

10. Soit l'équation

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots\ldots - Rx^n - Sx^r \pm 1 = 0,$$

supposons que S soit le plus grand coefficient négatif et que n soit le plus grand exposant des termes négatifs; l'on cherchera dans les termes positifs, ceux dont l'inconnue est élevée à une puissance plus grande que n, et le plus grand de ces coefficiens étant designé par P, on aura $x < \frac{S}{P} + 1$; en effet, divisons l'équation par P, on aura

$$\frac{x^m}{P} + x^{m-1} + \frac{Q}{P}x^{m-1} \ldots\ldots - \frac{R}{P}x^n - \frac{S}{P}x^r \ldots\ldots \frac{V}{P} = 0.$$

la somme des termes négatifs est plus petite que

$$\frac{S}{P}(x^n + x^{n-1} \ldots\ldots - x + 1) \text{ ou que } \frac{S}{P}\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1},$$

si l'on fait

$$\frac{S}{P} = x - 1, \text{ ou } x = \frac{S}{P} + 1,$$

$\frac{S}{P}\left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)$ devient $x^{n+1} - 1$; et puisque nous avons choisi p parmi les termes élevés à une puissance supérieure à n, on doit avoir $m - 1 =$ ou $> n + 1$, par conséquent le terme positif x^{m-1} est plus grand que la somme de tous les termes négatifs, lorsque l'on fait $x = \frac{S}{P} + 1$, par conséquent les valeurs positives de x sont plus petites que $\frac{S}{P} + 1$.

Si l'on applique cette méthode à l'équation

$$x^4 + 50x^3 + 60x^2 - 90x - 60 = 0,$$

on trouve

$$x < \frac{90}{60} + 1, \text{ ou } x < \frac{5}{2}.$$

La méthode du plus grand coefficient donnerait

$$x < 90 + 1, \text{ ou } x < 91.$$

11. Ce même procédé peut être appliqué à la recherche des plus petites racines, ou du moins à la détermination de leur limite inférieure.

Faisons $x = \frac{1}{z}$ dans l'équation du n° 10, on aura

$$\frac{1}{V} + \frac{P}{V}z + \frac{Q}{V}z^2 - \frac{R}{V}z^{m-n} - \frac{S}{V}z^{m-r} \ldots\ldots + \frac{T}{V}z^{m-1} \pm z^m = 0,$$

si $m - S$ est le plus grand exposant des termes négatifs, et T le plus grand coefficient des termes qui contiennent l'inconnue à une puissance plus haute que $m - S$, on aura

$$z < \frac{S}{T} + 1, \text{ ou } z < \frac{S+T}{T}, \text{ ou } x > \frac{T}{S+T}.$$

TROISIEME PROCÉDÉ.

12. Soit l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-3} \ldots + Sx^2 + Tx + V = 0,$$

faisons

$$V = a^m V', \; T = a^{m-1} T', \; S = a^{m-2}, S' \ldots\ldots, \; A = aA',$$

l'équation deviendra

$$x^m + A'ax^{m-1} + B'a^2x^{m-2} \ldots\ldots S'a^{m-2}x + T'a^{m-1}x + V'a^m = 0,$$

et si B′ est le plus grand multiplicateur de a, dans les termes négatifs, on aura

$$x^m < B'a(x^{m-1} + ax^{m-2} \ldots\ldots a^{m-1}) \text{ ou } x^m < B'a\,\frac{x^m - a^m}{x-a},$$

$$\text{ou } x^m(x-a) < B'ax^m - B'a^{m+1},$$

$$\text{ou } x^{m+1} < (B'a + a)x^m - B'a^{m+1},$$

divisant par x^m, on aura

$$x < B'a + a - B'\frac{a^{m+1}}{x^m}, \text{ ou } x < (B'+1)a\,;$$

pour a, on peut prendre $\sqrt[m]{V}$ ou une quantité plus petite si l'on veut.

Soit l'équation $x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 9x + (16)^2 = o$,

le procédé du plus grand coefficient donne $x < 9 + 1$ ou $x < 10$.

Le 2e procédé que nous avons proposé, donne $x < \frac{9}{5} + 1$ ou $x < 2{,}80$.

Le 3e procédé donne, en faisant $a = 4$, $x < (\frac{9}{64} + 1)4$ ou $x < 4{,}56$.

RECHERCHE DES LIMITES

dans les équations simultanées à 2 variables.

13. Si l'on a les deux équations

$$\left.\begin{aligned} x^m + A\,x^{m-1} + B\,x^{m-2} \ldots\ldots V = o \\ x^n + A'x^{n-1} + B'x^{n-2} \ldots\ldots V' = o \end{aligned}\right\} \ldots (1)\ldots (2)$$

dans lesquelles A, B, C. . . . . A′, B′, C′ sont des fonctions de y de la forme $a + by + cy^2 \ldots\ldots my^\mu$; on peut se proposer de déterminer les limites des valeurs de x et de y, et pour arriver à ce but, il existe plusieurs procédés, qui sont plus ou moins exacts, suivant que l'on emploie ou qu'on surpasse l'équation finale.

PREMIER PROCÉDÉ.

14. Nous supposons que l'on ait éliminé x entre les deux équations (1) et (2), et que l'on soit arrivé à l'équation finale

$$y^r + Py^{r-1} + Qy^{r-2} \ldots\ldots H = o,$$

au moyen des principes exposés dans les articles 9, 10, 11 et 12, on déterminera les limites extrêmes des valeurs de y. Quant à celles de x, voici comment on y parviendra : on éliminera y entre l'équation finale $y^r + py^{r-1} = o$, et l'équation $A = a + by + cy^2 \ldots\ldots my^\mu$ et l'on aura une équation du degré ε, qui ne contiendra que A et des quantités connues.

Supposons que cette équation soit

$$A^r + \alpha A^{r-1} + \beta A^{r-2} \ldots\ldots + \gamma = o,$$

on cherchera les limites des valeurs négatives de A, on fera la même opération sur tous les autres coefficiens de l'équation (1), et celui qui donnera le plus grand résultat, sera regardé comme le plus grand coefficient négatif de l'équation (1). Donc si β est le plus grand de tous ces résultats, $\beta + 1$ sera la limite des racines positives.

Il est bon de remarquer que dans la pratique, il ne sera pas toujours nécessaire d'éliminer y entre l'équation finale et tontes les équations $A = a + by + cy^2 \ldots\ldots my^\mu$, etc.

On pourra quelquefois reconnaître à la seule inspection de ces coefficiens, ceux qui doivent rester plus petits que les autres, et comme l'élimination n'a d'autre but que de faire connaître la limite du plus grand coefficient négatif, on pourra se dispenser d'avoir égard, non-seulement aux termes dont l'infé-

riorité numérique aura été reconnue, mais encore à ceux qu'on jugera devoir rester toujours positifs.

La limite des plus grandes racines étant $\beta+1$, les plus petites racines positives seront plus grandes que $\frac{V}{\beta+V}$, en prenant pour V sa plus petite valeur ou une quantité plus petite.

Si $V=\delta+\varepsilon y.....\pi y\theta$, on éliminera y entre cette équation et l'équation finale $y^r+Py^{r-1}.....+H=o$, et l'on aura une équation qui ne renfermera que V, et que nous représentons par $V^r+\alpha' V^{r-1}.....+\gamma'=o$; laquelle donnera $V>\frac{\gamma'}{\alpha'+\gamma'}$: mettant cette valeur dans

$$\frac{V}{\beta+V}, \text{ on aura } \frac{\frac{\gamma'}{\alpha'+\gamma'}}{\beta+\frac{\gamma'}{\alpha'+\gamma'}}<x \text{ ou } \frac{\gamma'}{\beta(\alpha'+\gamma')+\gamma'}<x ,$$

On remarquera sans doute que nous n'avons employé que l'équation (1) pour effectuer les différentes éliminations dont nous avons eu besoin. Cependant il n'existe aucun motif de préférence qui puisse faire adopter l'une des deux équations plutôt que l'autre. Il est vrai cependant que chacune d'elles peut fournir des limites différentes, de sorte que si l'on eût opéré sur l'équation (2), on n'eût pas trouvé $\beta+1$; mais soit que la nouvelle limite eût été plus grande que $\beta+1$, soit qu'elle eût été plus petite, elle n'en serait pas moins la limite de toutes les valeurs propres à satisfaire à la question. Si la dernière limite est plus grande que $\beta+1$, c'est qu'elle sert de limite à toutes les racines de l'équation (2), et parmi ces racines, il peut y en avoir d'étrangères à la question.

DEUXIÈME PROCÉDÉ.

15. Ce procédé consiste à éliminer y entre les équations (1) et (2); on arrive alors à une équation finale en x, telle que $x^s + Kx^{s-1} \ldots\ldots L = o$, et si K est le plus grand coefficient négatif, on aura

$$\frac{L}{K+V} < x > K + 1.$$

TROISIÈME PROCÉDÉ.

16. Ce nouveau procédé a pour but de supprimer l'équation finale et de n'employer que les équations (1) et (2).

Pour arriver à ce but, on commencera par chercher les coefficiens qui doivent rester plus grands que les autres, soit $A = a + by + cy^2 \ldots\ldots my^\mu$ un de ceux-ci, on éliminera y entre l'équation (1) et l'équation $A = a + by + cy^2 \ldots\ldots my^\mu$, et l'on aura une équation en A et x du degré m: on éliminera pareillement y entre l'équation (2) et l'équation $A = a + by + cy^2 \ldots\ldots my^\mu$, et l'on obtiendra une nouvelle équation en A et x, ensuite l'on éliminera x entre ces deux dernières équations et l'on arrivera à une équation $A^r + \alpha A^{r-1} \ldots\ldots + \gamma = o$ qui est celle de l'article 14; et sur laquelle on fera les mêmes opérations. On traitera également les autres coefficiens de l'équation (1), et l'on arrivera au même résultat que dans l'article précité, avec la seule différence que dans ce cas on effectue les éliminations à l'aide des équations (1) et (2) tandis que dans le premier, elles se sont faites avec l'équation finale.

QUATRIÈME PROCÉDÉ.

17. Le procédé que nous allons décrire ne peut donner que des limites très-éloignées des racines : voici cependant en quoi il consiste. Lorsqu'on est parvenu à l'équation finale $y^r + py^{r-1} \ldots + H = o$ et qu'on a déterminé les limites $p+1$ des valeurs de y, on suppose que tous les termes qui composent les coefficiens A, B, C sont de même signe, de sorte que si a est le plus grand coefficient de A, on aura

$$A < a(y^\mu + y^{\mu-1} \ldots + 1) \text{ ou } A < a\left(\frac{y^{\mu+1}-1}{y-1}\right)$$

donc, si m est le plus grand exposant et a le plus grand coefficient numérique, on aura

$x < a\left(\frac{y^{m+1}-1}{y-1}\right) + 1$ et comme $y < P+1$, il en résulte que

$$x < a\left(\frac{(P+1)^{m+1}-1}{P}\right) + 1,$$

la limite inférieure s'obtiendra en se guidant sur les principes de l'article 14.

CINQUIÈME PROCÉDÉ.

18. Le procédé que nous venons de décrire peut être perfectionné de manière à donner des limites plus rapprochées des véritables racines.

Ayant déterminé les quatre limites des valeurs de y, savoir y_1, y_2 pour les racines positives et $-y_3$, $-y_4$ pour les racines négatives; on commencera par mettre dans l'équation $A = a + by + cy^2 \ldots my^\mu$, y_1 à la place de y dans tous les termes

positifs, et y_0 dans tous les termes négatifs ; ensuite l'on mettra $-y_3$ dans les termes qui doivent être négatifs, et $-y_2$ dans ceux qui doivent devenir positifs, et le plus grand de ces deux résultats, s'ils sont négatifs tous les deux, sera regardé comme la limite de A. On fera la même opération sur tous les autres coefficiens de l'équation (1), et celui qui donnera un plus grand résultat négatif, sera regardé comme le plus grand coefficient négatif de l'équation (1), de sorte que si ce résultat maximum est égal à β, on aura $x<\beta+1, x>\frac{V}{\beta+1}$, on obtiendra de la même manière les limites des racines négatives ; il suffira de changer le signe de x.

Détermination de la plus petite différence entre deux racines.

---

19. Lorsqu'on a trouvé l'équation finale et les limites extrêmes des racines, on fait des substitutions assez rapprochées pour qu'on puisse s'apercevoir de l'existence de toutes les racines, et pour que ces substitutions puissent remplir ce but, il faut que la distance qui les sépare ne puisse pas renfermer un intervalle de deux racines consécutives, c'est-à-dire, que cette distance doit être plus petite que la plus petite différence entre deux racines quelconques.

Si α, β, γ, δ, etc., sont des racines de l'équation finale $y^r+Py^{r-1}+$ etc. $=o$, on formera avec ces racines l'équation

$$(u-\alpha+\beta)(u+\alpha-\beta)(u-\gamma+\alpha)(u+\gamma-\alpha)\ldots\ldots=o,$$

ou $[u^2-(\alpha-\beta)^2][u^2-(\alpha-\gamma)^2]\ldots\ldots=o$:

cette formation est facile, puisque les coefficiens de l'équation sont des fonctions symétiques de α, β, γ, qui peuvent

toujours être exprimées rationnellement avec les coefficiens P, Q, S. On peut aussi former cette équation par la seule élimination; et voici comment.

Supposons que α soit une racine de l'équation finale $y^r + Py^{r-1} \ldots = o$, faisons $u = y - \alpha$, on aura $y = u + \alpha$ et

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^r + r\alpha^{r-1}u \ldots\ldots + u^r \\ + P\alpha^{r-1} + (r-1)P\alpha^{r-2} \ldots\ldots P u^{r-1} \\ \ldots\ldots + H \end{array}\right\} = o. \quad (3)$$

et comme α est une valeur de y, $\alpha^r + P\alpha^{r-1} \ldots + H = o$. (4) et le reste de l'expression (3) divisé par u donne une équation de la forme

$$u^{r-1} + \theta u^{r-2} \ldots = o. \quad (5)$$

éliminant α entre les équations (4) et (5), on aura une équation en y du degré $r(r-1)$, qui sera précisément l'équation aux différences.

Si l'équation $y^r + Py^{r-1} \ldots = o$, avait des racines égales, l'équation aux différences aurait autant de racines nulles, et ces racines s'annonceraient par une diminution dans le degré de l'équation aux différences.

La plus petite racine de cette équation sera égale à la plus petite différence entre deux racines de l'équation $y^r + Py^{r-1} = o$, et par conséquent la limite inférieure des racines de l'équation aux différences est une quantité plus petite que la plus petite différence entre deux valeurs de y.

Pour obtenir une limite de la plus petite différence entre deux valeurs de x, on formera l'équation aux différences de l'équation $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots + V = o$, et l'on opérera comme si les coefficiens A, B, C étaient connus.

Soit $u^{2V} + Zu^{2V-2} \ldots\ldots + X = o$, l'équation résultante dans laquelle $Z = m + ny + py^2 \ldots\ldots y^{-2} \ldots\ldots$ (6) on éliminera y entre l'équation (6) et l'équation $y^r + py^{r-1} = o$, et l'on aura une équation qu'on pourra représenter par $Z^r + A_1 Z^{r-1} \ldots = o$, et si A_1 est le plus grand coefficient négatif, les racines positives de Z seront plus petites que

$$A_1 + 1,$$

on mettra $-Z$ à la place de $+Z$, et si B_1 est le coefficient négatif le plus élevé, les valeurs négatives de Z seront plus petites que

$$B_1 + 1,$$

faisant la même opération sur tous les coefficiens de l'équation

$$u^{2V} + Zu^{2V-2} \ldots\ldots + X = o,$$

on parviendra à connaître la limite des plus grands coefficiens négatifs; et si cette limite est $\dot{Z}$, les valeurs positives de u seront plus grandes que $\frac{\dot{X}}{\dot{Z} + \dot{X}}$ en prenant pour $\dot{X}$, la limite inférieure des valeurs de X, comme dans l'article 14.

20. On peut arriver à la connaissance des limites des racines de l'équation aux différences, sans passer par l'équation finale

$$y^r + Py^{r-1} \ldots\ldots = o;$$

on regarde y comme connu, et l'on forme avec l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} \ldots\ldots + V = o,$$

l'équation aux différences

$$u^{2V} + Zu^{2V-2} \ldots\ldots + X = o,$$

puis l'on élimine x et y entre les équations $Z = m + ny + py^2 \ldots$

$$x^m + Ax^{m-1} \ldots\ldots + V = o,$$
$$x^n + A'x^{n-1} \ldots\ldots + V' = o,$$

et l'on arrive à une équation qui ne contient que Z et des coefficiens connus. L'on détermine dans cette équation les limites de Z et en faisant la même opération sur les autres coefficiens de l'équation aux différences, l'on connaît le plus grand coefficient de cette équation, et cela suffit pour avoir la limite des racines u.

21. Nous allons maintenant reprendre le même problême, pour le résoudre d'une manière plus simple, en supprimant, comme Lagrange l'a fait pour les équations à une inconnue, l'équation auxiliaire des différences :

Supposons que α soit une racine x de l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} \ldots\ldots + V = o,$$

on aura

$$\alpha^m + A\alpha^{m-1} \ldots\ldots + V = o. \quad (7)$$

faisons $u = x - \alpha$, ou $\alpha = x - u$, mettons cette valeur dans l'équation (7), on aura $U + \varepsilon u + \varepsilon' u^2 + \varepsilon'' u^3 \ldots\ldots + u^m = o$, en représentant par U la quantité nulle $\alpha^m + A\alpha^{m-1} \ldots\ldots$
de sorte que l'on aura, à cause de $U = o$,

$$\varepsilon + \varepsilon' u + \varepsilon'' u^2 \ldots\ldots u^{m-1} = o. \quad (8)$$

les coefficiens $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \ldots$ se déduisant de l'équation $x^m + Ax^{m-1} = o$ d'une manière très-simple,

$$\text{si } Y = x^m + Ax^{m-1} + \ldots B x^{m-2} \ldots\ldots,$$

on trouve que

$$\varepsilon = \frac{dy}{dx} = m x^{m-1} + (m-1) A x^{m-2} \ldots\ldots$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \varepsilon'' = \frac{1}{2.3} \frac{d^3 y}{dx^3} \ldots\ldots$$

Si ε' est le plus grand coefficient négatif, on aura

$$u > \frac{\varepsilon}{\varepsilon' + \varepsilon} :$$

quoique ε' ne soit pas connu, puisque les coefficiens de l'équation (8) contiennent x et y, on peut déterminer ses limites, en suivant les procédés que nous avons exposés; mais pour avoir ε, il faut éliminer x et y entre les 3 équations suivantes,

$$\varepsilon = mx^{m-1} + (m-1)\mathrm{A}x^{m-2} \ldots\ldots$$
$$x^m + \mathrm{A}x^{m-1} \ldots\ldots = o,$$
$$x^n + \mathrm{A}'x^{n-1} \ldots\ldots = o,$$

cette élimination donnera une équation en ε dans laquelle on déterminera la limite des plus petites racines, soit positives, soit négatives, et si K est cette limite, on aura $u > \frac{\mathrm{K}}{\varepsilon' + \mathrm{K}}$.

22. Lagrange, pour déterminer cette limite, a imaginé un second procédé, qu'il a appliqué aux équations à une seule inconnue, mais qui peut s'étendre au cas que nous traitons, en opérant de la manière suivante.

Faisons $u = \frac{1}{t}$ et mettons cette valeur dans l'équation (8), on aura $\varepsilon + \frac{\varepsilon'}{t} + \frac{\varepsilon''}{t^2} \ldots\ldots \frac{1}{t^{m-1}} = o$, ou

$$t^{m-1} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} t^{m-2} + \frac{\varepsilon''}{\varepsilon} t^{m-3} \ldots\ldots + \frac{1}{\varepsilon} = o. \quad (9)$$

Le but de la nouvelle méthode est de faire disparaître le dénominateur ε, ou plutôt de faire disparaître les termes variables qu'il contient, afin de parvenir à la limite des différences par la seule connaissance des limites de x et y.

Multiplions le polynome ε par le polynome π du degré $m-1$, que nous représentons par

$$\left.\begin{array}{c}\mu_1 y+\mu_2 y^2 \ldots\ldots \mu_{m-1} y^{m-1}\\ \lambda+\lambda_1 x+\lambda_2 x^2 \ldots\ldots \lambda_{m-1} x^{m-1}\\ \gamma_1 x^{m-2} y+\gamma_2 x^{m-3} y^2 \ldots\ldots \gamma_{m-2} x y^{m-2}\end{array}\right\}$$

le produit s'élèvera au degré $2m-2$ puisque ε est du degré $m-1$; mais on pourra réduire ce polynome au degré $m-1$ avec le secours de l'équation $x^m+Ax^{m-1}=o$, prenons pour exemple le terme Rx^m; l'équation ci-dessus donne

$$x^m=-Ax^{m-1}-Bx^{m-2}\ldots\ldots,$$

de sorte que

$$Rx^m=-RAx^{m-1}-RBx^{m-2}\ldots\ldots,$$

on réduirait de la même manière les degrés d'un ordre plus élevé : ayant reduit le produit $\pi\varepsilon$ au degré $m-1$, on égalera à zéro les coefficiens de tous les termes à l'exception de ceux qui ne contiennent ni x ni y, et l'on aura $3m-4$ équations qui suffiront pour déterminer les $3m-4$ constantes inconnues qui forment le polynome π; et à l'aide de ces équations, le produit $\pi\varepsilon$ se réduira à une quantité constante K, de sorte que l'on aura $\varepsilon=\frac{K}{\pi}$, mettant cette valeur dans l'équation (9), on aura

$$t^{m-1}+\frac{\pi\varepsilon'}{K}t^{m-2}\ldots\ldots+\frac{\pi}{K}=o,$$

et si $\frac{\omega}{K}$ est le plus grand coefficient négatif, on a

$$t<\frac{\omega}{K}+1,\ \text{ou}\ \frac{1}{t}>\frac{1}{\frac{\omega}{K}+1},\ \text{ou}\ u>\frac{K}{\omega+K}$$

et comme $u=x-\alpha$, il en résulte que la plus petite différence entre deux valeurs de x est plus grande que $\frac{K}{\omega+K}$.

APPLICATIONS.

Prenons les deux équations

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ \ldots\ x^2+(y-y^2)x-y^2+1=o\\(2)\ \ldots\ x^2-y^2x+y-2y^2-2=o\end{array}\right\}$$

si l'on élimine x entre ces deux équations, on trouve

$$y^5-2y^4-y^3+4y^2-6y+9=o$$

pour l'équation finale.

Les limites des racines positives, sont, d'après l'article 10, $\frac{6}{4}+1=2{,}5$, et $\frac{9}{4+9}=\frac{9}{13}=0{,}69$ et les limites négatives $5{,}5$, et $0{,}81$; mettant ces limites dans l'équation (1) et opérant comme il est prescrit dans l'article 18, on trouvera que le plus grand coefficient de cette équation est au-dessous de $(5{,}5)^2-0{,}81=29{,}44$, de sorte que l'on a $x<29.44+1$ ou $x<30.44$.

Pour trouver la limite de la différence des racines nous emploirons le procédé de l'article 21.

D'après les notations de cet article $y=x^2+(y-y^2)x-y^2+1$,

$$\text{d'où } \frac{dy}{dx}=\varepsilon=2x+y-y^2;\frac{d^2y}{dx^2}=2\varepsilon'=2,\ \text{ou } \varepsilon'=1,$$

mettant ces valeurs dans l'équation (9), on aura $t+\frac{1}{2x+y-y^2}=o$, multipliant le polynome ε par le polynome

$$a+bx+cy+dx^2+fxy+y^2,$$

on aura 5 inconnues à trouver, et en opérant comme dans l'article 22, on trouvera

$$t > 1 + 25 \text{ ou } u < \frac{1}{26},$$

c'est-à-dire, que la plus petite différence entre deux valeurs de x est plus petite que $\frac{1}{26}$.

FIN.